SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

G. DORE

SOMMA DI OPERATORI CHIUSI E APPLICAZIONI A EQUAZIONI DIFFERENZIALI

22 GENNAIO 1987

1. INTRODUZIONE

Sia A il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo in uno spazio di Banach X.

Consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$(1) \qquad \begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

dove f è una funzione da $[0,T]$ a X con regolarità che verrà precisata in seguito.

Per il problema (1) sono state date numerose definizioni di soluzione; qualunque sia la definizione data si ha comunque (se $f \in L^1([0,T],X)$)

$$(2) \qquad u(t) = \int_0^t T(t-s)\, f(s) ds$$

dove T è il semigruppo generato da A.

La (2) garantisce la unicità della soluzione, ma indica anche che, in generale, non ci si può attendere che la u così definita sia una "vera" soluzione. Scegliendo per esempio $f(t) = T(t)\, x$, f è continua, ma si ottiene $u(t) = t\, T(t)x$ e in generale non si ha neppure la appartenenza di $u(t)$ a $\mathscr{D}(A)$ o la derivabilità della u.

E' chiaro quindi che se si vuole avere l'esistenza di soluzioni "buone" per (1) è necessario fare ipotesi sulla f e/o sul semigruppo o anche, come vedremo in seguito, sullo spazio X.

Le soluzioni considerate nel seguito saranno le seguenti:

a) Soluzioni nel senso continuo:
$u \in C^1([0,T],X) \cap C([0,T],\mathscr{D}(A))$ tale che $u(0) = 0$ e
$\forall t \in [0,T]$ $u'(t) = Au(t) + f(t)$

b) Soluzioni nel senso L^p $(1 \leq p < +\infty)$:
$u \in W^{1,p}([0,T],X) \cap L^p([0,T], \mathscr{D}(A))$ tale che $u(0) = 0$ e
$u'(t) = A\,u(t) + f(t)$ q.d. su $[0,T]$

(qui e nel seguito $\mathscr{D}(A)$ sarà dotato della norma del grafico).

La (2) garantisce inoltre che dalla esistenza di soluzione del problema di Cauchy per ogni f in un certo spazio funzionale segue immediatamente la dipendenza continua di Au e u' da f.

Infatti la (2) definisce un operatore continuo da $L^1([0,T],X)$ a $C([0,T],X)$, mentre gli operatori di derivazione e di moltiplicazione per A sono operatori chiusi in $C([0,T],X)$. Perciò se il problema di Cauchy (1) ha soluzione nel senso continuo $\forall f$ in uno spazio di Banach $\mathscr{F}$ immerso con continuità in $L^1([0,T],X)$ allora gli operatori $f \to u'$ e $f \to Au$ sono operatori chiusi da $\mathscr{F}$ a $C([0,T],X)$ (perché composizione di un operatore continuo con uno chiuso) e sono definiti su tutto $\mathscr{F}$, perciò sono continui.

Analogo fatto vale per le soluzioni nel senso L^p.

2. SOLUZIONI NEL SENSO CONTINUO

Ipotesi classiche che, dato un arbitrario A generatore di un semigruppo C_0, garantiscono la esistenza di soluzioni in senso continuo, sono la appartenenza di f a $C^1([0,T],X)$ oppure a $C([0,T], \mathscr{D}(A))$ (vedi [P]).

Tali ipotesi possono essere indebolite chiedendo che $f \in W^{1,1}([0,T],X)$ oppure $f \in L^1([0,T], \mathscr{D}(A)) \cap C([0,T],X)$ (vedi p. es. [DPS] Th. 8.1 e 8.3).

Nel caso in cui A generi un semigruppo analitico l'esistenza di soluzioni è garantita da ipotesi più deboli sulla f.

Oltre al risultato classico secondo cui esiste la soluzione se f è hölderiana, è stato provato che il problema (1) ha soluzione anche se f è continua secondo Dini, cioè se esiste $\phi \in C([0,T], [0,+\infty[)$ tale che

$$\forall t,s \in [0,T] \quad |f(t)-f(s)| \leq \phi(|t-s|) \quad \text{e} \quad \int_0^T \frac{\phi(t)}{t}\,dt < +\infty$$

(vedi [CP] Th. 3.2).

Oltre che da una regolarità della f rispetto alla variabile t la esistenza di soluzioni di (1) è assicurata anche dalla regolarità dei valori di f. Si ha infatti ([SI] Th. 5.1):

se $f \in C([0,T], X) \cap B([0,T], (X,\mathcal{D}(A))_{\sigma,\infty})$ allora il problema (1) ha soluzione nel senso continuo.

(Indichiamo con $(X,\mathcal{D}(A))_{\sigma,\infty}$ gli spazi di interpolazione reale tra X e $\mathcal{D}(A)$ e con $B([0,T],Y)$ lo spazio delle funzioni limitate a valori in Y).

Il problema (1) ha inoltre soluzione continua per ogni $f \in C([0,T],X)$ se A è limitato.

Esistono però anche operatori non limitati per cui il problema (1) ha soluzione per ogni f continua.

Esempio:

Sia $X = c_0$, $\mathcal{D}(A) = \{(x_n)_{n\in N} \in c_0 : (n\, x_n) \in c_0\}$. $A: \mathcal{D}(A) \to c_0$ tale che $(Ax)_n = -n\, x_n$. A genera il semigruppo $T(t)$ con $(T(t)x)_n = e^{-nt} x_n$.

Il problema (1) ha in questo caso la soluzione u tale che

$$u_n(t) = e^{-tn} \int_0^t e^{sn}\, f_n(s)ds$$

e questa è in $C^1([0,T],X) \cap C([0,T], \mathcal{D}(A))$.

Gli operatori per cui il problema (1) ha soluzione nel senso continuo qualunque sia il dato continuo sono stati caratterizzati tramite il semigruppo che essi generano da Travis (vedi [T]). Egli prova che (1) ha soluzione per ogni f continua se e solo se il semigruppo $T(t)$ generato da A è a "semivariazione limitata", cioè al variare di $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ tra le decomposizioni di $[0,T]$ si mantiene limitato

$$\sup\{\|\sum_{j=0}^{n} [T(t_j)-T(t_{j-1})]x_j\| : x_j \in X , \|x_j\| \leq 1\}$$

In particolare se il semigruppo è a variazione limitata esso è anche a semivariazione limitata.

Si può inoltre provare ([T] Lemma 3.2) che il fatto che T sia a semivarazione limitata dipende dal comportamento di T in un intorno di 0.

Non sono state finora trovate caratterizzazioni migliori dei semigruppi a semivariazione limitata, è stato però provato che se X non contiene lo spazio c_0, quindi per esempio se X è riflessivo, non esistono operatori A illimitati tali che il problema (1) ha soluzione nel senso continuo per ogni f continua (vedi [B]).

Inoltre se esiste soluzione continua per ogni f continua, scegliendo $f = T(\cdot)x$, $x \in X$, tenuto conto che si ha dipendenza continua dal dato, risulta:

$$\sup_{t\in[0,T]} \|tA\ T(t)x\| =$$

$$= \sup_{t\in[0,T]} \|A \int_0^t T(t-s)\ T(s)x\ ds\| \leq$$

$$\leq C \sup_{t\in[0,T]} \|T(t)x\| \leq C_2 \|x\|$$

e quindi $\|tAT(t)\|$ è limitata se $t \to 0$ perciò il semigruppo T è analitico.

3. SOLUZIONI NEL SENSO L^p

Per avere l'esistenza di soluzioni nel senso L^p le ipotesi su f possono ovviamente essere indebolite.

Per esempio se A genera un semigruppo analitico e se $f \in W^{\sigma,p}([0,T],X)$ oppure $f \in L^p([0,T], (X,\mathcal{D}(A))_{\sigma,p})$ $(0<\sigma<1)$ allora esiste la soluzione

nel senso L^p. (Vedi [G] Th. 6.1 e 6.5).

Per quel che riguarda la esistenza di soluzioni L^p qualsiasi sia $f \in L^p$ de Simon in [DS] ha dimostrato che se A genera un semigruppo analitico e se X è uno spazio di Hilbert e $1<p<+\infty$ allora data comunque $f \in L^p([0,T],X)$ esiste una soluzione nel senso L^p di (1).

La dimostrazione procede come segue: anzitutto il teorema è provato per p = 2 servendosi della trasformata di Fourier; inoltre servendosi di un teorema di moltiplicatori di Schwartz ([SC]) si prova che l'operatore $f \to Au$ è limitato da L^1 a L^1_{deb}, il teorema di interpolazione di Marcinkiewicz garantisce allora il risultato per $1<p<2$ e con argomenti di dualità si passa al caso $2<p<+\infty$.

In connessione con questo risultato vedi anche [SO], [DG], [VW]. Passando agli spazi di Banach le cattive proprietà della trasformata di Fourier non consentono di generalizzare la dimostrazione di de Simon.

Recentemente Cannarsa e Vespri (vedi [CV] e [VES]) hanno provato che se A genera un semigruppo analitico in uno spazio di Banach e se esiste $p \in]1,+\infty[$ per cui si ha esistenza di soluzione L^p per ogni $f \in L^p$ allora la stessa cosa è vera qualsiasi sia $p \in]1,+\infty[$. Essi provano che se u è soluzione di (1) allora l'operatore $f \to Au$ è continuo da L^1 a L^1_{deb} e da L^∞ a BMO. Opportuni teoremi di interpolazione consentono allora di ottenere la continuità in ogni L^p se essa sussiste per un $p \in]1,+\infty[$.

4. CHIUSURA DELLA SOMMA DI OPERATORI

Sia $\mathcal{F}$ uno spazio di Banach immerso con continuità in $L^1([0,T],X)$. Definiamo in $\mathcal{F}$ i seguenti operatori

$\mathcal{A}: \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to \mathcal{F}$

$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{u \in \mathcal{F} : u(t) \in \mathcal{D}(A)$ q.d. su $[0,T]$, $Au \in \mathcal{F}\}$

$(\mathcal{A}u)(t) = -A(u(t))$

$\mathcal{B}: \mathcal{D}(\mathcal{B}) \to \mathcal{F}$

$\mathscr{D}(\mathscr{B}) = \{u \in \mathscr{F}: u' \in \mathscr{F}, u(0) = 0\}$

$\mathscr{B}u = u'$

$\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ sono operatori chiusi in $\mathscr{F}$ se $\mathscr{F} = L^1([0,T],X)$, quindi anche se $\mathscr{F}$ è immerso con continuità in L^1.

Il problema (1) si scrive allora

$$(3) \qquad \mathscr{A}u + \mathscr{B}u = f$$

La (2) definisce un operatore lineare continuo $\mathscr{S}$ in $L^1([0,T],X)$ e per $\mathscr{F}$ opportuno (p. es. C o L^p) anche in $\mathscr{F}$, tale operatore è un inverso sinistro di $\mathscr{A}+\mathscr{B}$.

Questo ci garantisce che $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ è chiudibile. Infatti se $u_n \to 0$, $u_n \in \mathscr{D}(\mathscr{A}) \cap \mathscr{D}(\mathscr{B})$ e $(\mathscr{A}+\mathscr{B})\, u_n \to f$ allora $u_n = \mathscr{S}(\mathscr{A}+\mathscr{B})u_n \to \mathscr{S} f$ e quindi $\mathscr{S}f = 0$, perciò se $\tau \in [0,T]$

$$0 = \int_0^\tau \int_0^t T(s)f(t-s)\, ds\, dt = \int_0^\tau T(s) \int_s^\tau f(t-s)\, dt\, ds =$$

$$= \int_0^\tau T(\tau-s) \int_{\tau-s}^\tau f(t-\tau+s)\, dt\, ds = \int_0^\tau T(\tau-s) \int_0^s f(t)\, dt\, ds$$

Ma $s \to \int_0^s f(t)dt$ è in $W^{1,1}$ e quindi $\mathscr{S}(\int_0^\cdot f(t)dt)$ è soluzione in senso continuo di (1), ma, visto che tale soluzione è identicamente nulla sarà $\int_0^\cdot f(t)dt = 0$ e quindi $f = 0$ q.d.; perciò $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ è chiudibile. La dimostrazione appena fatta prova inoltre che $\mathscr{S}$ è iniettiva, dunque $\overline{\mathscr{A}+\mathscr{B}} = \mathscr{S}^{-1}$.
Se $\overline{\mathscr{A}+\mathscr{B}} = \mathscr{S}^{-1}$ allora $\forall f \in \mathscr{F}$ $\mathscr{S}f$ è soluzione di (3), cioè è soluzione di (1) nel senso di $\mathscr{F}$. Condizione necessaria per la uguaglianza $\mathscr{A}+\mathscr{B} = \mathscr{S}^{-1}$ è il fatto che $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ sia chiuso. Tale condizione è anche sufficiente se si sa che

$\mathscr{C}(\mathscr{A}+\mathscr{B})$ è denso in $\mathscr{F}$, cioè che la (3) ha soluzione per f in un sottospazio denso di $\mathscr{F}$; come visto in precedenza questo è verificato se p. es. $\mathscr{F} = L^p([0,T],X)$ $1 \leq p < \infty$. Ha quindi un certo interesse lo studio di condizioni che assicurino che l'operatore $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ è chiuso.

E' evidente che non si potranno fare ipotesi del tipo $\mathscr{D}(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{D}(\mathscr{B})$ perché in tal caso il risultato ottenuto non sarebbe applicabile a (1).

In questo ordine di idee si ha il seguente teorema dovuto a Da Prato e Grisvard ([DPG] Th. 3.14).

<u>Teorema 1.</u> Sia $\mathscr{H}$ uno spazio di Hilbert complesso, siano $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ due operatori chiusi in $\mathscr{H}$, invertibili, con risolventi che commutano e tali che esistano $\sigma_{\mathscr{A}}, \sigma_{\mathscr{B}} \geq 0$, con $\sigma_{\mathscr{A}} + \sigma_{\mathscr{B}} > \pi$ per cui:

$$\Sigma_{\mathscr{A}} = \{z \in \mathbf{C} : \pi - \sigma_{\mathscr{A}} < \arg z < \pi + \sigma_{\mathscr{A}}\} \subseteq \rho(\mathscr{A})$$

$$\Sigma_{\mathscr{B}} = \{z \in \mathbf{C} : \pi - \sigma_{\mathscr{B}} < \arg z < \pi + \sigma_{\mathscr{B}}\} \subseteq \rho(\mathscr{B})$$

e inoltre $\sup_{z \in \Sigma_{\mathscr{A}}} (1+|z|) \|(\mathscr{A}-z)^{-1}\| < +\infty$ $\sup_{z \in \Sigma_{\mathscr{B}}} (1+|z|) \|(\mathscr{B}-z)^{-1}\| < +\infty$

Supponiamo infine che esista $\theta \in]0,1[$ tale che

$$(\mathscr{H}, \mathscr{D}(\mathscr{B}))_{\theta,2} = (\mathscr{H}, \mathscr{D}(\mathscr{B}^*))_{\theta,2}$$

Sotto tali ipotesi $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ è chiuso e invertibile.

La dimostrazione si basa sul fatto che l'operatore

$$\mathscr{S} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\mathscr{A}+z)^{-1} (\mathscr{B}-z)^{-1} dz$$

(con γ curva opportuna in $\rho(\mathscr{B}) \cap \rho(-\mathscr{A})$) è continuo in $\mathscr{H}$ e è l'inverso di $\overline{\mathscr{A}+\mathscr{B}}$. Inoltre si prova che, posto $\mathscr{Y} = (\mathscr{H}, \mathscr{D}(\mathscr{B}))_{\theta,2} = (\mathscr{H}, \mathscr{D}(\mathscr{B}^*))_{\theta,2}$, $f \in \mathscr{Y} \Rightarrow \mathscr{S} f \in \mathscr{D}(\mathscr{B})$ e $\mathscr{B}\mathscr{S}$ è continua da $\mathscr{Y}$ in sé, analogamente $\mathscr{B}^* \mathscr{S}^*$ è continua

da $\mathscr{Y}$ in sé, perciò $\mathscr{B}\mathscr{S}$ si prolunga a un operatore continuo da $\mathscr{Y}^*$ in sé ($\mathscr{H}$ si identifica con un sottospazio di $\mathscr{Y}^*$). Si sa che in questo caso $\mathscr{H}$ è di interpolazione tra $\mathscr{Y}$ e $\mathscr{Y}^*$ e quindi $\mathscr{B}\mathscr{S}$ è prolungabile a un operatore continuo in $\mathscr{H}$, dunque $\mathscr{S}(\mathscr{H}) \subseteq \mathscr{D}(\mathscr{B})$. Anche $\mathscr{A}\mathscr{S} = 1-\mathscr{B}\mathscr{S}$ è prolungabile a un operatore continuo in $\mathscr{H}$ e perciò $\mathscr{S}(\mathscr{H}) \subseteq \mathscr{D}(\mathscr{A})$. Ma allora

$$\mathscr{D}(\overline{\mathscr{A}+\mathscr{B}}) = \mathscr{S}(\mathscr{H}) \subseteq \mathscr{D}(\mathscr{A}) \cap \mathscr{D}(\mathscr{B})$$

e quindi $\overline{\mathscr{A}+\mathscr{B}} = \mathscr{A}+\mathscr{B}$.

Il teorema 1 consente di ottenere l'esistenza di soluzioni in senso L^2 del problema (1) per ogni f in L^2 se A è generatore infinitesimale di un semigruppo analitico di tipo esponenziale negativo in uno spazio di Hilbert. (L'operatore che soddisfa la condizione sugli spazi di interpolazione è la derivata).

Nel teorema 1 l'ipotesi

$$(\mathscr{H}, \mathscr{D}(\mathscr{B}))_{\theta,2} = (\mathscr{H}, \mathscr{D}(\mathscr{B}^*))_{\theta,2}$$

può essere sostituita dalla seguente: $\forall s \in \mathbf{R}$ $\mathscr{B}^{is} \in \mathscr{L}(X)$ e $s \to \mathscr{B}^{is}$ è un semigruppo fortemente continuo.

Questa ipotesi è più debole della precedente: vedi [Y].

La dimostrazione procede in questo modo. Come prima $\mathscr{B}\mathscr{S}$ è limitato da $(\mathscr{H},\mathscr{D}(\mathscr{B}))_{\theta,2}$ in sé $\forall \theta \in]0,1[$, ma in ambito hilbertiano tale spazio coincide con lo spazio di interpolazione complessa $[\mathscr{H},\mathscr{D}(\mathscr{B})]_\theta$ e questo, per le ipotesi su $\mathscr{B}^{is}$, coincide con $\mathscr{D}(\mathscr{B}^\theta)$. Ma allora $\mathscr{B}\mathscr{S} \in \mathscr{L}(\mathscr{D}(\mathscr{B}^\theta))$ e $\mathscr{B}\mathscr{S} = \mathscr{B}^\theta \mathscr{S} \mathscr{B}^{-\theta} \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$.

Come prima questo implica che $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ è chiuso e $\mathscr{S} = (\mathscr{A}+\mathscr{B})^{-1}$. Anche questa versione del teorema può essere utilizzata per lo studio del problema (1) ottenendo le stesse conclusioni.

Rafforzando le ipotesi si può estendere il teorema agli spazi di Banach ζ-convessi (o UMD, vedi [VEN]).

<u>Teorema 2.</u> ([DV] Th. 2.1). Sia $\mathscr{F}$ uno spazio di Banach complesso ζ-convesso.

Siano $\mathscr{A}:\mathscr{D}(\mathscr{A})\to\mathscr{F}$, $\mathscr{B}:\mathscr{D}(\mathscr{B})\to\mathscr{F}$ operatori lineari chiusi in $\mathscr{F}$ con dominio denso.

Supponiamo che:

a) $\mathbf{R}^-\cup\{0\}\subseteq\rho(\mathscr{A})\cap\rho(\mathscr{B})$ e esiste $M\in\mathbf{R}^+$ tale che

$$\forall t\in\mathbf{R}^-\cup\{0\}\quad \|(\mathscr{A}-t)^{-1}\|\leq\frac{M}{1+t}$$

$$\|(\mathscr{B}-t)^{-1}\|\leq\frac{M}{1+t}$$

b) $\forall\lambda\in\rho(\mathscr{A})\quad\forall\mu\in\rho(\mathscr{B})\quad[(\mathscr{A}-\lambda)^{-1},(\mathscr{B}-\mu)^{-1}]=0$

c) $\forall s\in\mathbf{R}\ \mathscr{A}^{is}\in\mathscr{L}(\mathscr{F}),\mathscr{B}^{is}\in\mathscr{L}(\mathscr{F})$ e i gruppi $s\to\mathscr{A}^{is}$, $s\to\mathscr{B}^{is}$ sono fortemente continui.

Inoltre valgono le stime
$\|\mathscr{A}^{is}\|\leq K\,e^{\theta_{\mathscr{A}}|s|}$ $\|\mathscr{B}^{is}\|\leq K\,e^{\theta_{\mathscr{B}}|s|}$ con $\theta_{\mathscr{A}}+\theta_{\mathscr{B}}<\pi$

Allora $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ è chiuso e invertibile.

Per dimostrare questo teorema consideriamo l'operatore

$$\mathscr{S}=\frac{1}{2i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\mathscr{A}^{-z}\mathscr{B}^{z-1}}{\operatorname{sen}(\pi z)}\,dz$$

con $c\in\,]0,1[$.

La funzione integranda è olomorfa in $\mathscr{L}(\mathscr{F})$ per $0<\operatorname{Re} z<1$, inoltre $\|\mathscr{A}^{-z}\mathscr{B}^{z-1}\|\leq \text{cost}\ e^{(\theta_{\mathscr{A}}+\theta_{\mathscr{B}})|\operatorname{Im} z|}$
e quindi l'integrale converge e non dipende da c.
$\mathscr{S}$ è un inverso sinistro di $\mathscr{A}+\mathscr{B}$. Infatti se $x\in\mathscr{D}(\mathscr{A}+\mathscr{B})$ allora

$\mathscr{S}(\mathscr{A}+\mathscr{B})x =$

$$= \frac{1}{2i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\mathscr{A}^{1-z}\mathscr{B}^{z-1}x+\mathscr{A}^{-z}\mathscr{B}^{z}x}{\text{sen}(\pi z)}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} - \int_{c-1-i\infty}^{c-1+i\infty}\right) \frac{\mathscr{A}^{-z}\mathscr{B}^{z}x}{\text{sen}(\pi z)}\, dz =$$

$$= \pi \ \text{Res}_{z=0}\left(\frac{\mathscr{A}^{-z}\mathscr{B}^{z}}{\text{sen}(\pi z)}x\right) = x$$

Viceversa se $x\in\mathscr{D}(\mathscr{A}^{\alpha})$ per qualche $\alpha\in]0,1[$ allora $\mathscr{S}x\in\mathscr{D}(\mathscr{A}+\mathscr{B})$ e $(\mathscr{A}+\mathscr{B})\mathscr{S}x= x$

Infatti in tal caso

$$\frac{\mathscr{A}\mathscr{A}^{-z}\mathscr{B}^{z-1}x}{\text{sen}(\pi z)} = \frac{\mathscr{A}^{1-z-\alpha}\mathscr{B}^{z-1}\mathscr{A}^{\alpha}x}{\text{sen}(\pi z)}$$

è integrabile sulla retta Re $z= 1-\alpha$, perciò $\mathscr{S}x\in\mathscr{D}(\mathscr{A})$ e

$$\mathscr{A}\mathscr{S}x = \frac{1}{2i}\int_{1-\alpha-i\infty}^{1-\alpha+i\infty} \frac{\mathscr{A}^{1-z}\mathscr{B}^{z-1}x}{\text{sen}(\pi z)}\, dz$$

D'altra parte in questo caso

$$\mathscr{S}x = \frac{1}{2i}\int_{-\alpha-i\infty}^{-\alpha+i\infty} \frac{\mathscr{A}^{-z}\mathscr{B}^{z-1}x}{\text{sen}(\pi z)}\, dz + \pi\ \text{Res}_{z=0}\left(\frac{\mathscr{A}^{-z}\mathscr{B}^{z-1}}{\text{sen}\ \pi z}x\right) =$$

$$= -\frac{1}{2i}\int_{1-\alpha-i\infty}^{1-\alpha+i\infty} \frac{\mathscr{A}^{1-z}\mathscr{B}^{z-2}x}{\text{sen}(\pi\ z)}\, dz + \mathscr{B}^{-1}x = -\mathscr{B}^{-1}\mathscr{A}\mathscr{S}x + \mathscr{B}^{-1}x$$

Perciò $\mathscr{S}x\in\mathscr{D}(\mathscr{B})$ e $\mathscr{B}\mathscr{S}x = -\mathscr{A}\mathscr{S}x + x$.

Da tutto questo segue che $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ è chiudibile e $\mathscr{S} = (\overline{\mathscr{A}+\mathscr{B}})^{-1}$.

Infatti se $x_n\in\mathscr{D}(\mathscr{A}+\mathscr{B})$ $x_n\to 0$ e $(\mathscr{A}+\mathscr{B})x_n \to y$ allora
$x_n = \mathscr{S}(\mathscr{A}+\mathscr{B})x_n \to \mathscr{S}y$ e quindi $\mathscr{S}y=0$.

Visto che se $0<\alpha<1$ $\mathscr{A}^{-1}y \in \mathscr{D}(\mathscr{A}^{\alpha})$ si ha $\mathscr{S}\mathscr{A}^{-1}y \in \mathscr{D}(\mathscr{A}+\mathscr{B})$ e $(\mathscr{A}+\mathscr{B})\mathscr{S}\mathscr{A}^{-1}y = \mathscr{A}^{-1}y$, ma $\mathscr{S}\mathscr{A}^{-1}y = \mathscr{A}^{-1}\mathscr{S}y = 0$ quindi anche $\mathscr{A}^{-1}y = 0$ e allora $y = 0$, perciò $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ è chiudibile.

Inoltre sia $x \in \mathscr{D}(\overline{\mathscr{A}+\mathscr{B}})$, sia $x_n \in \mathscr{D}(\mathscr{A}+\mathscr{B})$ tale che $x_n \to x$ $(\mathscr{A}+\mathscr{B})x_n \to (\overline{\mathscr{A}+\mathscr{B}})x$.

Evidentemente $x_n = \mathscr{S}(\mathscr{A}+\mathscr{B})\, x_n \to \mathscr{S}(\overline{\mathscr{A}+\mathscr{B}})x$ e quindi $\mathscr{S}(\overline{\mathscr{A}+\mathscr{B}})x = x$
Viceversa dato $x \in \mathscr{F}$ sia $x_n \in \mathscr{D}(\mathscr{A})$ $x_n \to x$; allora $\mathscr{S}x_n \in \mathscr{D}(\mathscr{A}+\mathscr{B})$, $\mathscr{S}x_n \to \mathscr{S}x$ e $(\mathscr{A}+\mathscr{B})\mathscr{S}x_n = x_n$ da cui $(\mathscr{A}+\mathscr{B})\mathscr{S}x_n \to x$ e quindi $\mathscr{S}x \in \mathscr{D}(\overline{\mathscr{A}+\mathscr{B}})$ e $(\mathscr{A}+\mathscr{B})\mathscr{S}x = x$.

Per provare che $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ è chiuso è sufficiente allora dimostrare che $\mathscr{S}(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{D}(\mathscr{A}) \cap \mathscr{D}(\mathscr{B})$, perché allora $\mathscr{D}(\overline{\mathscr{A}+\mathscr{B}}) \subset \mathscr{D}(\mathscr{A}+\mathscr{B})$.

A tal fine è fondamentale l'ipotesi che $\mathscr{F}$ sia ζ-convesso che finora non è stata utilizzata.

Sia $\varepsilon \in \mathbf{R}^{+}$. Si ha

$$\mathscr{S} = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\mathscr{A}^{-z}\mathscr{B}^{z-1}}{\operatorname{sen}(\pi z)}\, dz$$

dove Γ_ε è la curva da $-i\infty$ a $+i\infty$ composta dalle due semirette $\{is: |s|>\varepsilon\}$ e dal semicerchio $\{z: |z|=\varepsilon \quad \operatorname{Re} z \geq 0\}$.

Risulta quindi:

$$\mathscr{S}x = \frac{1}{2} \int_{|s|\geq\varepsilon} \frac{\mathscr{A}^{-is}\mathscr{B}^{-1+is}x}{\operatorname{sen}(\pi is)}\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\varepsilon e^{i\theta}}{\operatorname{sen}(\pi\varepsilon e^{i\theta})} \mathscr{A}^{-\varepsilon e^{i\theta}} \mathscr{B}^{\varepsilon e^{i\theta}-1}x\, d\theta = \phi_\varepsilon x + \psi_\varepsilon x.$$

Si vede facilmente che $\psi_\varepsilon x \to \frac{1}{2}\mathscr{B}^{-1}x$ per $\varepsilon \to 0$.

Inoltre $\phi_\varepsilon x \in \mathscr{D}(\mathscr{B})$ e

$$\mathscr{B}\phi_\varepsilon x = \frac{1}{2} \int_{|s|\geq\varepsilon} \frac{\mathscr{A}^{-is}\mathscr{B}^{is}x}{\operatorname{sen}(\pi is)}\, ds$$

Se $\mathscr{B}\phi_\varepsilon x$ converge per $\varepsilon\to 0$ allora, visto che $\phi_\varepsilon x \to \mathscr{S}x - \frac{1}{2}\mathscr{B}^{-1}x$, si ha $\mathscr{S}x - \frac{1}{2}\mathscr{B}^{-1}x \in \mathscr{D}(\mathscr{B})$ e quindi $\mathscr{S}x \in \mathscr{D}(\mathscr{B})$.

La convergenza di $\mathscr{B}\phi_\varepsilon x$ si prova come segue:

$$\mathscr{B}\phi_\varepsilon x = \frac{1}{2}\int_{|s|\geq 1} \frac{\mathscr{A}^{-is}\mathscr{B}^{is}x}{\operatorname{sen}(\pi i s)}\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\varepsilon\leq|s|\leq 1} \frac{\mathscr{A}^{-is}\mathscr{B}^{is}x}{\pi i s}\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\varepsilon\leq|s|\leq 1} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi i s)} - \frac{1}{\pi i s}\right)\mathscr{A}^{-is}\mathscr{B}^{is}\, x\, ds$$

Il primo addendo non dipende da ε, il terzo è convergente perché $\frac{1}{\operatorname{sen}\pi i s} - \frac{1}{\pi i s}$ ha limite finito in 0. Il secondo addendo è $\frac{1}{2i}\cdot(\mathscr{H}_\varepsilon F)(0)$ dove $\mathscr{H}_\varepsilon$ è la trasformata di Hilbert troncata, cioè

$$(\mathscr{H}_\varepsilon F)(t) = \frac{1}{\pi}\int_{|s|\geq\varepsilon} \frac{F(t-s)}{s}\, ds$$

e $F(s) = \chi_{[-1,1]}(s)\mathscr{A}^{is}\mathscr{B}^{-is}$

Tale F è in $L^p(\mathbf{R},\mathscr{F})$ $\forall p\in]1,+\infty[$ e quindi per le proprietà degli spazi ζ-convessi $\mathscr{H}_\varepsilon F$ converge quasi dappertutto su $\mathbf{R}$.

Scelto allora t piccolo per cui $(\mathscr{H}_\varepsilon F)(t)$ converge si ha:

$$\int_{\varepsilon\leq|s|\leq 1} \frac{\mathscr{A}^{-is}\mathscr{B}^{is}x}{\pi i s}\, ds = \mathscr{A}^{-it}\mathscr{B}^{it}\frac{1}{i\pi}\left[\int_{|s|\geq\varepsilon} \frac{F(t-s)}{s}\, ds -\right.$$

$$\left. + \left(\int_{-1}^{t-1} - \int_{1}^{t+1}\right)\frac{\mathscr{A}^{i(t-s)}\mathscr{B}^{i(s-t)}}{s}\, ds\right]$$

che converge per $\varepsilon \to 0$.

Abbiamo quindi $\mathscr{S}(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{D}(\mathscr{B})$ e in modo analogo si ottiene $\mathscr{S}(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{D}(\mathscr{A})$.

Si può provare che le ipotesi fatte su $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$ implicano che

$$\sigma(\mathscr{A}) \subseteq \{\rho\, e^{i\theta} : \rho>0 \quad |\theta| \leq \theta_{\mathscr{A}}\}$$

$$\sigma(\mathscr{B}) \subseteq \{\rho\, e^{i\theta} : \rho>0 \quad |\theta| \leq \theta_{\mathscr{B}}\}$$

e quindi la limitazione $\theta_{\mathscr{A}} + \theta_{\mathscr{B}} < \pi$ è del tutto naturale perché collegato col fatto che $\mathscr{A}$ e $-\mathscr{B}$ abbiano spettri disgiunti (vedi [DPG] paragrafo 3).

Per applicare il teorema 2 al problema (1) è necessario conoscere il comportamento delle potenze puramente immaginarie dell'operatore di derivazione.

Si ha il seguente teorema:

Teorema 3. ([DV] Th. 3.1). Sia X uno spazio di Banach complesso ζ-convesso sia $T \in \mathbf{R}^+$, $p \in]1,+\infty[$, $\mathscr{F} = L^p([0,T],X)$. Poniamo

$$\mathscr{D}(\mathscr{B}) = \{u \in W^{1,p}([0,T],X) : u(0) = 0\}$$

$$\mathscr{B} : \mathscr{D}(\mathscr{B}) \to \mathscr{F}, \mathscr{B}u = u'.$$

Si ha:

a) $\mathbf{R}^- \cup \{0\} \subseteq \rho(\mathscr{B})$ e esiste $K \in \mathbf{R}^+$ tale che
$\forall \lambda \leq 0 \quad \|(\lambda - \mathscr{B})^{-1}\| \leq \dfrac{K}{1-\lambda}$

b) $\forall \xi \in \mathbf{R}\ \mathscr{B}^{i\xi} \in \mathscr{L}(\mathscr{F})$, $\xi \to \mathscr{B}^{i\xi}$ è un gruppo fortemente continuo e
$\|\mathscr{B}^{i\xi}\| \leq K_1(1 + \xi^2)\, e^{\pi/2|\xi|}$

La dimostrazione della parte b si basa su una versione del teorema dei moltiplicatori di Mihlin per funzioni a valori vettoriali valido in spazi ζ-convessi ([MC] Th. 1.1). Si prova infatti che per $f \in \mathscr{F}$, $\varepsilon \in]0,1[$, $\xi \in \mathbf{R}$, $t \in [0,T]$ è

$$(B^{-\varepsilon+i\xi}f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon-i\xi)} \int_0^t (t-s)^{\varepsilon-i\xi-1} f(s)ds =$$

$$= (\Psi_{\varepsilon,\xi} * F)(t) = (\hat{\Psi}_{\varepsilon,\xi}\hat{F})^{V}(t)$$

se F è il prolungamento di f a $\mathbf{R}$ che si annulla fuori da [0,T] e

$$\Psi_{\varepsilon,\xi}(s) = \begin{cases} 0 & s \leq 0 \\ s^{\varepsilon-1-i\xi} & s > 0 \end{cases}$$

Tenuto conto che

$$\hat{\Psi}_{\varepsilon,\xi}(\lambda) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{i(\varepsilon-1-i\xi)\pi/2} \lambda_-^{i\xi-\varepsilon} - e^{-i(\varepsilon-1-i\xi)\pi/2} \lambda_+^{i\xi-\varepsilon} \right)$$

(dove $\lambda_+ = \max\{\lambda,0\}$, $\lambda_- = \max\{-\lambda,0\}$) passando al limite per $\varepsilon \to 0$ si ottiene, almeno se $f \in C_0^\infty(]0,T[, X)$, $\mathscr{B}^{i\xi}f = (m_\xi \hat{F})^V$ con $m_\xi(\lambda) = e^{-\pi/2\xi \operatorname{sgn}\lambda} |\lambda|^{i\pi}$. m_ξ soddisfa le ipotesi del citato teorema perché

$$m_\xi \in C^2(\mathbf{R}\setminus\{0\}, \mathbf{C})$$

e

$$\sup_{0 \leq q \leq 2} \sup_{\lambda} |\lambda^q m_\xi^{(q)}(\lambda)| \leq K(1+\xi^2)\, e^{\frac{\pi}{2}|\xi|}$$

Perciò $\forall f \in C_0^\infty(]0,T[, X)$

$$\| \mathscr{B}^{i\xi} f \|_{\mathscr{F}} \leq \text{cost } (1+\xi^2) \, e^{\frac{\pi}{2}|\xi|} \, \|f\|_{\mathscr{F}}$$

Per densità si ha allora b.

Visto che se X è ζ-convesso, anche L^p è ζ-convesso per $1<p<+\infty$ si ha quindi

<u>Teorema 4.</u> ([DV] Th. 3.2). Sia X ζ-convesso. Sia A un operatore chiuso con dominio denso in X. Supponiamo che sia $[0,+\infty[\subseteq \rho(A)$ e $(1+\lambda)\|(A-\lambda)^{-1}\|$ sia limitato su $[0,+\infty[$.

Supponiamo inoltre che $\xi \to A^{i\xi}$ sia un gruppo fortemente continuo in $\mathscr{L}(X)$, con $\|A^{i\xi}\| \leq K \, e^{\theta_A|\xi|}$ con $0 \leq \theta_A < \frac{\pi}{2}$.

Allora $\forall f \in L^p([0,T],X)$, $1<p<+\infty$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) & 0 \leq t \leq T \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

ammette una e una sola soluzione in senso L^p.

Operatori che soddisfino le condizioni del teorema 4 sono per esempio le realizzazioni in L^q $(1<q<+\infty)$ di operatori ellittici su domini regolari con opportune condizioni al bordo (vedi [SE]).

BIBLIOGRAFIA

[B] D. BAILLON: Caractère borné de certains générateurs de semigroupes linéaires dans les espaces de Banach. C.R. Acad. Sci. Paris, 290 (1980) 757-760.

[CV] P. CANNARSA, V. VESPRI, On maximal L^p regularity for the abstract Cauchy problem. Boll. Un. Mat. It. (6), 5-B (1986), 165-175.

[CP] M.G. CRANDALL, A. PAZY, On the differentiability of weak solutions of a differential equation in Banach spaces. J. Math. Mech, 18 (1968/69) 1007-1016.

[DPG] G. DA PRATO, P. GRISVARD, Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationelles. J. Math. Pures Appl. (9) 54 (1975), 305-387.

[DPS] G. DA PRATO, E. SINESTRARI, Differential operators with non dense domain. Preprint.

[DG] J. DE GRAAF, A constructive approach to one-parameter semigroups of operators in Hilbert space. Arch. Rat. Mech. Anal. 43 (1971), 125-153.

[DS] L. DE SIMON, Un'applicazione della teoria degli integrali singolari allo studio delle equazioni differenziali lineari astratte del primo ordine. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 34 (1964), 547-558.

[DV] G. DORE, A. VENNI, On the closedness of the sum of two closed operators. Preprint.

[G] P. GRISVARD, Equations différentielles abstraites. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4), 2 (1969), 311-395.

[MC] T.R. McCONNELL, On Fourier multiplier transformations of Banach-valued functions. Trans. Amer. Math. Soc. 285 (1984), 739-757.

[P] R.S. PHILLIPS, Perturbation theory for semi-groups of linear operators. Trans. Amer. Math. Soc., 74 (1953), 199-221.

[SC] J.T. SCHWARTZ, A remark on inequalities of Calderon-Zygmund type for vector valued functions. Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), 785-799.

[SE] R. SEELEY, Norms and domains of the complex powers A_B^z. Am. J. Math. 93, (1971), 299-309.

[SI] E. SINESTRARI, On the abstract Cauchy problem of parabolic type in spaces of continuous functions. J. Math. Anal. Appl., 107 (1985), 16-66.

[SO] P.E. SOBOLEVSKII: Disuguaglianze di coercività per equazioni paraboliche astratte (in russo). Dokl. Acad. Nauk. SSSR, 157 (1964), 52-55.

[T] C.C. TRAVIS, Differentiability of weak solutions to an abstract inhomogeneus differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), 425-430.

[VEN] A. VENNI, Proprietà geometriche di uno spazio di Banach e convergenza della trasformata di Hilbert. Seminario in questo volume.

[VES] V. VESPRI, Regolarità massimale in L^p per il problema di Cauchy astratto e regolarità $L^p(L^q)$ per operatori parabolici. Atti del convegno su equazioni differenziali e calcolo delle variazioni, a cura di L. Modica, Pisa, 1985, 205-213.

[VW] W. VON WAHL, The equation $u' + A(t)u = f$ in a Hilbert space and L^p-estimates for parabolic equations. J. London. Math. Soc., 25 (1982), 483-497.

[Y] A. YAGI: Coincidence entre des espaces d'interpolations et des domains de puissance fractionnaires d'opérateurs. C.R. Acad. Sci., Paris, Sez. I, 299 (1984), 173-176.